§ 极大无关组与秩

定义：$\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\in F^n$，若 $\vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_r}$ 线性无关，且任加一个其他向量 $\vec{a}_{i_{r+1}}$ 后，$\vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_r},\vec{a}_{i_{r+1}}$ 线性相关，则称 $\vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_r}$ 为 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 的极大无关组.

注：$\vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_r}$ 为 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 的极大无关组

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_r} \text{ 线性无关} \\ \langle\vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_r}\rangle=\langle\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\rangle \end{cases}$$

证：· 首先 $\vec{a}_{i_1}\cdots\vec{a}_{i_r}$ 线性无关.

· $\langle\vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_r}\rangle=\langle\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\rangle$

$\Leftrightarrow \langle\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\rangle\subseteq\langle\vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_r}\rangle$

$\Leftrightarrow \vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\in\langle\vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_r}\rangle$

$\Leftrightarrow \vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_{r+1}}$ 线性相关 $\forall\, i_{r+1}\in\{1,\cdots,m\}$ $\square$

例：$\vec{a}_1=(2,-1,3,1)$，$\vec{a}_2=(4,-2,5,4)$，$\vec{a}_3=(2,-1,4,-1)$

任两个组成极大无关组. ($3\vec{a}_1=\vec{a}_2+\vec{a}_3$)

不唯一！如何寻找极大无关组？一个一个的去掉？比较复杂！

简单方法（初等变换不改变相关性）

定理：$\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\in F^n$ 列向量．对 $A=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)\in F^{n\times m}$

做一系列行初等变换 得到 $B=(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_m)\in F^{n\times m}$

(1) $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关（无关）$\Leftrightarrow$ $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_m$ 线性相关（无关）．

(2) $a_{i_1}\cdots a_{i_r}$ 极大 $\Leftrightarrow$ $b_{i_1}\cdots b_{i_r}$ 极大．

证：(1). LHS $\Leftrightarrow$ $AX=0$ 有非零解

$\overset{B=PA}{\underset{P\text{可逆}}{\Leftrightarrow}}$ $BX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ RHS．

(2) LHS $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} a_{i_1}\cdots a_{i_r} \text{ 线性无关} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} b_{i_1},\cdots,b_{i_r} \text{ 无关} \\ a_{i_1},\cdots,a_{i_r},a_j \text{ 线性相关} \ \forall j \overset{(1)}{\Leftrightarrow} b_{i_1}\cdots b_{i_r}\, b_j \text{ 相关} \end{array}\right\}$ $\Leftrightarrow$ RHS． □

例：$\vec{a}_1=(-1,5,3,-2)$，$\vec{a}_2=(4,1,-2,9)$，$\vec{a}_3=(2,0,-1,4)$，$\vec{a}_4=(0,3,4,-5)$．

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$，$\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_4\}$ 极大无关．

$\Rightarrow \{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$，$\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4\}$ 极大无关

$\{\vec a_1,\cdots,\vec a_m\}$ $\to$ $\{\vec a_{i_1},\cdots,\vec a_{i_r}\}$, $\{\vec a_{j_1},\cdots,\vec a_{j_s}\}$ $\quad r=s$?

定义： 称两向量组 $\vec a_1,\cdots,\vec a_m$ 与 $\vec b_1,\cdots,\vec b_l$ **等价**，若

(1) $\forall\, i\in\{1,\cdots,m\}$, $\vec a_i$ 可由 $\vec b_1\cdots\vec b_l$ 线性表示，

(2) $\forall\, j\in\{1,\cdots,l\}$, $\vec b_j$ 可由 $\vec a_1,\cdots,\vec a_m$ 线性表示.

记为 $\{\vec a_1,\cdots,\vec a_m\}\sim\{\vec b_1,\cdots,\vec b_l\}$

注："$\sim$" 为等价关系.

定理： $\{\vec a_1,\cdots,\vec a_m\}\sim\{\vec b_1,\cdots,\vec b_l\}\iff\langle\vec a_1,\cdots,\vec a_m\rangle=\langle\vec b_1,\cdots,\vec b_l\rangle$.

证：- - -

推论： (1) 一个向量组与它的任一极大无关组等价.

(2) 任两极大无关组等价.

定理： $\{\vec a_1,\cdots,\vec a_r\}$, $\{\vec b_1\cdots\vec b_s\}$ 都线性无关且相互等价，则 $r=s$.

特别地，向量组的任两极大无关组中向量的个数相同.

这一个数称为向量组的**秩**，记为 $\mathrm{rank}(\vec a_1,\cdots,\vec a_m)$ 或 $r(\vec a_1,\cdots,\vec a_m)$

方法一：反证. 不妨设 $r<s$

$$(\vec b_1\cdots\vec b_s)=(\vec a_1\cdots\vec a_r)V\qquad V=(v_{ij})_{r\times s}\in F^{r\times s}$$

$\Rightarrow$ $Vx=0$ 有非零解 $x=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_s\end{pmatrix}\neq0\Rightarrow(\vec b_1\cdots\vec b_s)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_s\end{pmatrix}=(\vec a_1\cdots\vec a_r)V\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_s\end{pmatrix}=0$ 矛

(V不是列满秩)

方法二：证 $s\le r$.

$$\begin{cases}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)=(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s)\mu & \mu=(\mu_{ij})_{s\times r}\\ (\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s)=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)\nu & \nu=(\nu_{ij})_{r\times s}\end{cases}$$

$\Rightarrow\quad (\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)\nu\mu$

$\Rightarrow\quad (\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)(I_r-\nu\mu)=0$

$\Rightarrow\quad \nu\mu=I_r$ （设 $I_r-\nu\mu=(x_{ij})_{r\times r}\Rightarrow \sum_{i=1}^{r}x_{ij}\vec{a}_i=0\ \forall j$ $\Downarrow$ $I_r-\nu\mu=0 \Leftarrow x_{ij}=0\ \forall i,\forall j$）

$\Rightarrow\quad r=\operatorname{rank}(\nu\mu)\le\operatorname{rank}(\nu)\le s$

类似地，$s\le r$. 因此 $s=r$.

秩与线性相关性.

定理：$\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r,\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s\in F^n$

(1) $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)=r$

(2) …… 相关 $\Leftrightarrow$ …… $<r$

用秩判断相关性

(3) $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s\}$ 可由 $\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\}$ 线性表出 $\Rightarrow \operatorname{rank}(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s)\le\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)$

(4). $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s\}\sim\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\}\Rightarrow\operatorname{rank}(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s)=\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)$

(5). $\vec{b}$ 可表示为 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 的线性组合，$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)=\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r,\vec{b})$

$AX=b$ 有解的充要条件.

Pf: (3). 不妨设 $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_k\}$ 为 $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s\}$ 的极大无关组.
$\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_l\}$ 为 $\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\}$ 的极大无关组.

则 $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_k\}$ 可由 $\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_l\}$ 线性表示.

$\Rightarrow (\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_k) = (\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_l)A \qquad A\in F^{l\times k}$

$\Rightarrow AX=0$ 无非零解 (若不然 不妨设 $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_k\end{pmatrix}=0 \quad \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_k\end{pmatrix}\neq 0$

则 $(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_k)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_k\end{pmatrix}=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_l)A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_k\end{pmatrix}=0$ 矛盾)

$\Rightarrow A$ 列满秩

$\Rightarrow k=\text{rank}(A)\leq l \quad \Rightarrow \text{rank}(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s)\leq \text{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)$.

向量组的秩与矩阵秩:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_m\end{pmatrix}=(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_n)$$

$\text{rank}(A) \rightsquigarrow$ A的秩

$\text{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m) \rightsquigarrow$ A的行秩

$\text{rank}(\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_n) \longrightarrow$ A的列秩

定理: 秩 = 行秩 = 列秩.

证: 初等变换不改变三者!

直接验证定理对相抵标准形成立.

推论： $A\in F^{n\times n}$.

(1) A 可逆 $\Leftrightarrow$ $\text{rank}(A)=n$ $\Leftrightarrow$ 行向量线性无关 $\Leftrightarrow$ 列向量线性无关

(2) $\text{rank}(A)=r$ $\Rightarrow$ 不为零的 r 阶子式所在行（列）构成 A 的行（列）向量的极大无关组.

例： $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times p}$.

$$\text{rank}(AB)\le \min\left(\text{rank}(A),\ \text{rank}(B)\right)$$

证： $(\vec{c}_1,\cdots,\vec{c}_p)=AB=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_n)B \Rightarrow \text{rank}(AB)\le\text{rank}(A)$

$\begin{pmatrix}\vec{c}_1{}' \\ \vdots \\ \vec{c}_m{}'\end{pmatrix}=AB=A\begin{pmatrix}\vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n\end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(AB)\le\text{rank}(B)$ □